Problema 3: CAPACITA’ ELETTRICA E CONDENSATORI

Premessa

Il problema, composto da quesiti di carattere teorico e da una successiva parte applicativa, costituisce un validissimo esempio di equilibrio tra le diverse esigenze che convergono sui docenti e studenti del liceo scientifico che, a partire dalla Circolare n.1 del MIUR del 29/01/2015, dovranno affrontare come disciplina della seconda prova dell'Esame di Stato una tra Matematica e Fisica, mentre per l'indirizzo di Scienze Applicate si aggiunge alle due precedenti Scienze Naturali.

Anche se non esistono dati provenienti da indagini statistiche ufficiali, vi sono numerose evidenze che denunciano una forte preoccupazione da parte di docenti e studenti sulla possibilità di una seconda prova di Fisica all'Esame di Stato per i licei scientifici. Vi sono numerose motivazioni tra le quali l'elemento di novità, poiché, ad eccezione della sperimentazione scientifico-tecnologica (Progetto Brocca), non esiste una storia di prove di Esame di Fisica.

Negli ultimi anni, specie a partire dal 2014/2015, sono state presentate delle proposte, sia dal ministero che da associazioni professionali, ma non hanno completamente tranquillizzato la comunità direttamente interessata.

In base agli elementi in precedenza delineati, crediamo sia utile e doveroso contribuire con degli esempi di prova alla riflessione e all'orientamento dei docenti e degli studenti impegnati nella preparazione di una prova che, presto o tardi, costituirà una realtà da affrontare.

E' bene ribadire che l'insegnamento della fisica non ha nella prova d'Esame solo un fine, ma soprattutto un mezzo per potenziarne la portata formativa, della cui importanza sono tutti consapevoli.

In conclusione riteniamo che il problema proposto sia un ottimo strumento didattico per favorire gli apprendimenti degli studenti e il lavoro dei loro docenti, viste le caratteristiche di grande equilibrio che ne caratterizzano l'articolazione, ma anche la base per proseguire nella formulazione di prove che possano orientare e rassicurare tutti gli interessati.

Il testo

I parte - Si espongano, in maniera sintetica, gli elementi fondamentali relativi ai seguenti argomenti:

capacità di un conduttore, capacità di un conduttore sferico, condensatori, condensatore piano, condensatori in serie e in parallelo, energia di un condensatore carico.

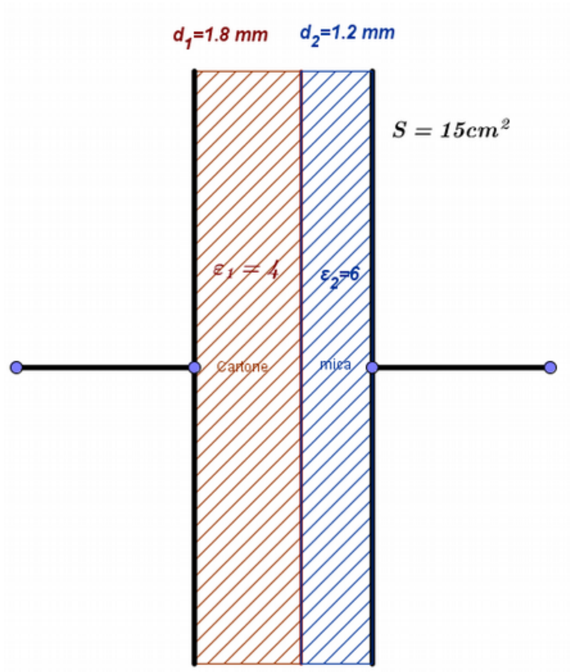
Gli argomenti di cui è richiesta la trattazione non comportano particolari difficoltà, ma costituiscono per lo studente un valido percorso di ricapitolazione degli elementi necessari per affrontare i quesiti del problema che successivamente dovrà risolvere.

Inoltre consentono di ripercorrere con la dovuta chiarezza e il necessario rigore gli aspetti fondamentali dell'elettrostatica.

A nostro parere il docente dovrà esigere una trattazione precisa e corretta con una deduzione completa dei risultati, senza dare per scontato alcun passaggio.

II parte - i Quesiti del problema

1. Tra le armature di un condensatore piano aventi la superficie S=15 *cm^2* e distanti 3 *mm* sono interposti due fogli, uno di cartone dello spessore d_1=1.8*mm* (costante dielettrica ε_1=4) e uno di mica di spessore d_2 =1.2*mm* (costante dielettrica ε_2=6). Si determini la capacità del condensatore.



Il condensatore può essere descritto da due condensatori piani in serie, ciascuno di superficie S e con distanze rispettivamente d_1 e d_2.

Compresa la situazione, diventa molto semplice risolvere il quesito. Si tratta di calcolare la capacità equivalente, che coincide con la richiesta del quesito:

$$\frac{1}{C_E}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \quad ,$$

e con alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$C_E=\frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,S}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}=20{,}42\ pF \quad .$$

2. Si ricavino le leggi di scarica e carica di un condensatore di capacità C attraverso una resistenza R e si traccino i rispettivi grafici; in entrambi i casi si calcoli il valore medio della differenza di potenziale V nell'intervallo di tempo [0, τ], essendo τ =RC la costante di tempo.

Il quesito costituisce un'applicazione delle equazioni differenziali, uno degli obiettivi specifici di apprendimento delle Indicazioni Nazionali del quinto anno del liceo scientifico.

Se lo studente non ha affrontato nello specifico il problema, conoscendo le equazioni differenziali e le modalità di analisi dei circuiti elettrici può giungere con relativa facilità alla soluzione.

La prima richiesta riguarda la scarica di un condensatore.

Dall'analisi del circuito RC, si ottiene:

$$Ri+V=0 \quad ,$$

ed esplicitando la corrente come derivata della carica elettrica rispetto al tempo si giunge alla seguente equazione differenziale

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q(t)}{C}=0 \quad .$$

Resta da risolvere una equazione differenziale a variabili separabili, obiettivo che dovrebbe essere alla portata possesso di ogni studente del quinto anno

$$\int \frac{dq}{q}=-\int \frac{dt}{RC}$$

da cui la soluzione della carica in funzione del tempo

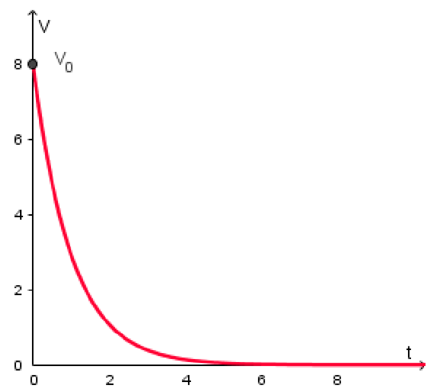
$$q(t)=A\,e^{\frac{-t}{RC}} \quad ,$$

con la condizione iniziale si ottiene

$$q(t)=C\,V_0 e^{\frac{-t}{RC}} \quad ,$$

quindi la differenza di potenziale in funzione del tempo è

$$V=V_0 e^{\frac{-t}{RC}} \quad .$$



Analogamente si risolve il problema della carica del condensatore.

Infatti, partendo sempre dal circuito RC e tenendo conto che il condensatore è carico ad una d.d.p. V_0, si ottiene

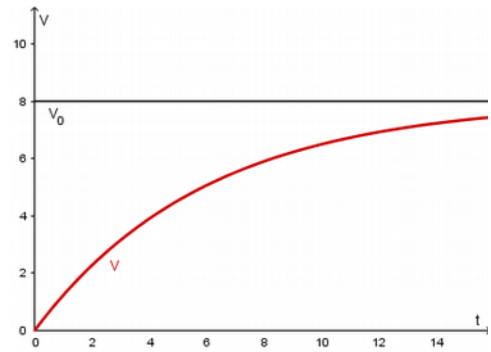
$$Ri+V=V_0$$

ed esplicitando la corrente come derivata della carica elettrica rispetto al tempo

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q(t)}{C}=V_0$$

la cui soluzione è, tenendo conto della condizione iniziale,

$$q(t)=C\,V_0\left(1-e^{\frac{-t}{RC}}\right) \quad ,$$



quindi la differenza di potenziale in funzione del tempo

$$V=V_0\left(1-e^{\frac{-t}{RC}}\right) \quad .$$

Il calcolo del valore medio della differenza di potenziale V nell'intervallo di tempo [0, τ], dove τ =RC è la costante di tempo, rappresenta una semplice applicazione del teorema della media integrale, a sostegno dell'idea che si potrebbero proporre moltissimi esercizi di analisi matematica nel quinto anno che abbiano oggetto degli argomenti di fisica.

$$V_m=\int V_0 e^{\frac{-t}{RC}}\frac{dt}{RC} \quad ,$$ dove l'integrale è calcolato tra 0 e τ,

$$V=\int_0^{\tau} V_0 e^{\frac{-t}{\tau}}\frac{dt}{\tau}$$

e la cui soluzione è:

$$V=V_0\left(1-\frac{1}{e}\right) \quad .$$

Nel caso della carica del condensatore si ottiene, con un procedimento analogo, la seguente soluzione:

$$V=\frac{V_0}{e} \quad .$$

3. Un condensatore piano con le armature, ciascuna di superficie S=1*m*^{2}, poste a distanza d=2*cm*, viene caricato con una d.d.p. V_0=500*V* ed immagazzina un'energia W=2,77$\cdot$10^{-4}*J*. Si determini la costante dielettrica relativa ε_r del dielettrico interposto. Supposto che tale dielettrico abbia resistività ρ=2.1015 $\Omega\cdot$*m*, si determini il tempo necessario perché la d.d.p. tra le armature si riduca a V_1=100*V*.

Il terzo e ultimo quesito consente di rivedere le relazioni e i concetti sull'energia immagazzinata in un condensatore.

Considerando le espressioni della capacità di un condensatore piano e l'energia in esso immagazzinata:

$$C=\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$ e

$$W=\frac{C V_0^2}{2}$$,

otteniamo

$$W=\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S V_0^2}{2\mathrm{d}}$$.

A questo punto si può ottenere l'espressione della costante dielettrica relativa

$$\varepsilon_r=\frac{2\mathrm{dW}}{\varepsilon_0 S V_0^2}$$

ed infine, sostituendo i dati numerici del problema, determinarne il valore richiesto

$$\varepsilon_r=4.99$$.

Ora si può rispondere alla seconda richiesta.

Conoscendo la resistività e le caratteristiche geometriche del dielettrico si può calcolare la resistenza R. Dalla formula precedentemente ricavata per la scarica del condensatore $V=V_0 e^{\frac{-t}{RC}}$, si può ricavare il tempo necessario perché la d.d.p. tra le armature si riduca a V_1

$$t=RC\cdot\ln\left(\frac{V_0}{V_1}\right) \text{ , con } RC=\rho\,\varepsilon_0\varepsilon_r\cdot\ln(5)$$

e sostituendo i valori numerici possiamo calcolare il tempo richiesto:

$$t=14{,}25\cdot 10^4 s=39{,}5\,h$$.