Problema 2: La relatività ristretta

a) ***Si espongano , in maniera sintetica, gli elementi fondamentali relativi ai seguenti argomenti: Le basi della relatività ristretta. I postulati di Einstein. Le trasformazioni di Lorentz. La contrazione della lunghezza e la dilatazione del tempo. Variazione della massa con la velocità. Massa ed energia.***

<u>Soluzione</u>

Le basi della Relatività Ristretta: equazioni di Maxwell e relatività galileiana

Il principio di relatività di Galileo afferma che *nessun fenomeno meccanico può mettere in evidenza la quiete assoluta o il moto assoluto di due sistemi di riferimento, S ed S', in moto relativo traslatorio uniforme.*

Le trasformazioni di coordinate, che permettono di passare dal sistema di riferimento S al sistema S', in moto traslatorio rispetto ad S, si chiamano *trasformazioni galileiane*. Nel caso semplice in cui si scelgano gli assi *y'* e *z'* paralleli agli assi *y* e *z* rispettivamente, *l'asse x'* coincidente con l'asse *x* ed orientato concordemente alla direzione del moto relativo dei due sistemi, esse sono:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

In cui è stata aggiunta l'ipotesi newtoniana che il tempo scorra uniformemente ed identicamente in ogni sistema di riferimento, ovvero che il tempo sia una grandezza assoluta.

Le equazioni tra grandezze fisiche che hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento collegati da una trasformazione galileiana, ovvero che siano *invarianti* per queste trasformazioni, soddisfano il principio di relatività galileiano.

Il primo risultato di queste trasformazioni è che la velocità è una grandezza relativa, cioè diversa in ogni sistema di riferimento, mentre l'accelerazione è una grandezza assoluta, cioè identica in uno qualsiasi degli infiniti sistemi di riferimento collegati da una trasformazione galileiana.

Possiamo concludere pertanto che la condizione necessaria affinché un'equazione tra grandezze fisiche sia invariante per trasformazioni galileiane è che in essa non compaia esplicitamente la velocità: le leggi di Newton della meccanica, in cui compare solo l'accelerazione, soddisfano il principio di relatività galileiano.

Dopo Galileo e Newton, si è sempre pensato che tutte le leggi fondamentali della fisica, e non solo quelle della meccanica classica, dovessero soddisfare il principio di relatività galileiano; le equazioni di Maxwell, pertanto, costituirono un grosso problema, poiché, pur esprimendo leggi fondamentali della fisica, non soddisfacevano questo principio, dato che in esse compare la velocità della luce nel vuoto. A riprova di ciò, basta riferirsi all'equazione per le onde elettromagnetiche (ricavata dalle equazioni di Maxwell e soddisfatta da una qualsiasi componente φ del campo elettrico o magnetico) che in qualsiasi sistema di unità è $\Delta^2\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$.

Tuttavia quest'equazione è formalmente identica all'equazione delle onde elastiche, ricavata da D'Alambert dalle equazioni di Newton e soddisfatta dal campo elastico $\psi : \Delta^2\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, in cui *v* rappresenta la velocità di propagazione dell'onda elastica relativamente al mezzo, cioè nel sistema inerziale di riferimento in cui il mezzo elastico è in quiete. Alla luce di ciò, il problema posto dalle equazioni dell'elettromagnetismo scompare se si suppone che *c* sia la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche rispetto al mezzo caratteristico in cui esse si propagano. Questo mezzo, di cui venne postulata l'esistenza, si chiama *etere elettromagnetico*. Esso, contrariamente ai mezzi elastici, deve essere incorporeo poiché le onde elettromagnetiche si propagano anche nello spazio vuoto; l'unica proprietà fisica che può caratterizzare l'etere è che rispetto ad esso, e solo rispetto ad esso, la velocità della luce nel vuoto è *c*.

La prima ed ovvia conclusione di questa interpretazione è che in qualsiasi sistema di riferimento diverso dall'etere elettromagnetico la luce deve muoversi nelle diverse direzioni con velocità diverse anche nel vuoto, come si ricava dalla legge di composizione delle velocità: $u_c = c + v$.

Alla fine dell'800 Michelson mise a punto un apparato di misura di notevole precisione in grado di rivelare un vento d'etere dell'ordine di 30 km/s, ma il risultato delle diverse esperienze, successivamente condotte assieme a Morley, fu nullo. Questo esperimento fu successivamente migliorato da molti altri sperimentatori; la sua attuale precisione permette di mettere in evidenza un vento d'etere di 3 m/s, ma il risultato dell'esperimento è sempre stato nullo.

I postulati di Einstein

Poiché una grandezza o un ente fisico è tale solo quando una misura ne mette in evidenza l'esistenza, la conclusione che bisogna trarre dal risultato nullo dell'esperimento di Michelson e Morley è che l'etere elettromagnetico *non esiste*. Partendo da questa constatazione, Albert Einstein, nel 1905, espose la Teoria della Relatività Ristretta, basata su due postulati:

1. *Qualsiasi fenomeno fisico, e non solamente un fenomeno meccanico, appare identico in qualsiasi sistema di riferimento inerziale;*

2. *La velocità della luce nel vuoto è pari a c in qualsiasi sistema inerziale.*

Il primo postulato non è nient'altro che l'estensione a qualsiasi fenomeno fisico del principio di relatività galileiano; esso implica che nessuna esperienza fisica può mettere in evidenza la quiete assoluta o il moto assoluto di due sistemi di riferimento inerziali diversi.

Il secondo postulato, detto anche *postulato della costanza della velocità della luce,* spiega il risultato nullo dell'esperimento di Michelson – Morley, in pratica la velocità della luce è indipendente dal moto della sorgente.

I due postulati enunciati fanno esplicito riferimento ai sistemi inerziali di riferimento, rispetto ai quali i fenomeni fisici sono particolarmente semplici. La loro estensione a sistemi di riferimento qualsiasi costituisce il programma della Teoria della Relatività Generale.

È chiaro che questi due postulati comportano una critica radicale ai concetti newtoniani di spazio e di tempo. La dimostrazione che la velocità della luce fosse costante in tutti i sistemi di riferimento fece crollare molti postulati su cui era basata la fisica classica. La variabile tempo, da grandezza assoluta, doveva essere considerata una grandezza relativa.

Le trasformazioni di Lorentz

Per sviluppare la TRR bisogna dedurre dai suoi postulati come mutano le coordinate di un evento, quando è osservato in sistemi di riferimento diversi, ovvero bisogna ricavare le trasformazioni di coordinate (spazio – temporali) che permettono di cambiare sistema di riferimento; queste trasformazioni sono chiamate *trasformazioni di Lorentz.*

Consideriamo due sistemi di riferimento S ed S', in moto traslatorio uniforme rispetto al sistema S. Prendiamo in esame il caso in cui gli assi y' e z' del sistema S' si mantengono paralleli agli assi y e z rispettivamente, e l'asse x' scorre sull'asse x; la velocità del moto relativo dei due sistemi è parallela e concorde sia ad x che a x'. In ciascuno dei due sistemi di riferimento andiamo ad eseguire la sincronizzazione degli orologi, sicché in S è definito il tempo t ed in S' il tempo t';

poiché l'istante iniziale è sempre convenzionale, si scelgono gli istanti $t = 0$ e $t' = 0$ coincidenti con l'istante in cui le origini O ed O' dei due sistemi sono sovrapposte. Tenendo conto che, in base al principio di relatività, un punto materiale libero deve muoversi con moto rettilineo uniforme rispetto a qualsiasi sistema inerziale; si deduce che le trasformazioni di Lorentz debbono preservare la dipendenza lineare dal tempo delle coordinate spaziali e quindi debbono essere lineari. Dopo una serie di considerazioni fisiche e passaggi matematici, si arriva alla formulazione di tali trasformazioni:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \beta c t}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{\beta}{c} x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \quad \text{in cui} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Osserviamo che le trasformazioni galileiane approssimano quelle di Lorentz per $v \prec\prec c, e\beta \prec\prec 1$; in questo limite infatti si ha: $\begin{cases} x' \approx (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' \approx t \end{cases}$, quindi la meccanica newtoniana mantiene la sua validità nello studio del moto dei corpi macroscopici, che di norma si muovono con velocità molto piccole rispetto a c.

La dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze

Dalle trasformazioni di Lorentz segue che nessun oggetto può muoversi con velocità maggiore di c. Infatti, abbiamo osservato che per velocità molto minori di quelle della luce, le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo. Detto questo, è ragionevole attendersi che nei fenomeni in cui sono in gioco velocità paragonabili a quella della luce, compaiono effetti del tutto sconosciuti alla fisica classica; fra questi effetti, i più noti sono la *dilatazione dei tempi* e *la contrazione delle lunghezze*.

<u>La dilatazione dei tempi</u>

Consideriamo un fenomeno che, rispetto al sistema di riferimento S', avvenga in un punto fisso dello spazio di coordinate (x', y', z'). Secondo l'orologio di S', se il fenomeno ha inizio nell'istante

t'_A e termina nell'istante t'_B, la sua durata sarà: $\Delta t' = t'_B - t'_A$. Lo stesso fenomeno osservato nel sistema S, rispetto al quale S' si muove con velocità *v*, inizia e termina rispettivamente negli istanti:

$$t_A = \frac{t'_A + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ e $$t_B = \frac{t'_B + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$, pertanto $$\Delta t = t_B - t_A = \frac{t'_B - t'_A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Questa relazione viene interpretata dicendo che *la durata di un fenomeno in movimento risulta dilatata di un fattore* $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ *rispetto alla durata dello stesso fenomeno visto in quiete.*

La contrazione delle lunghezze

Con considerazioni analoghe, possiamo confrontare la lunghezza di un'asta rigida nel sistema S, in cui l'asta si muove lungo l'asse x con velocità *v* con la lunghezza ottenuta nel sistema S', in cui l'asta si trova in quiete. In S' la lunghezza dell'asta è data da:

$$\Delta l' = x'_B - x'_A,$$

dove x'_A e x'_B sono le coordinate degli estremi dell'asta.

In S la lunghezza dell'asta è data da un'espressione analoga:

$$\Delta l = x_B - x_A,$$

alla quale si deve aggiungere la condizione $t_B = t_A = t$, dove t_B e t_A sono gli istanti del tempo di S in cui si eseguono le letture delle coordinate degli estremi dell'asta; infatti, poiché in S l'asta si muove, otterremmo un risultato errato se leggessimo le coordinate dei suoi estremi in istanti differenti.

Dalle trasformazioni di Lorentz si ricava allora: $$x'_A = \frac{x_A + vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ e $$x'_B = \frac{x_B - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$, da cui otteniamo

$$x'_B - x'_A = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$, ossia $$\Delta l = \Delta l'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$.

Questa relazione ci dice che *la lunghezza di un'asta in movimento (parallela alla direzione del moto) risulta contratta di un fattore* $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ *rispetto alla lunghezza della stessa asta misurata in quiete.*

È facile verificare tramite la seconda e la terza delle equazioni di Lorentz che nessuna contrazione è invece subita da un'asta disposta perpendicolarmente alla direzione del moto.

Variazione della massa con la velocità

La seconda legge della dinamica (*F = ma)* sappiamo essere covariante rispetto alle trasformazioni di Galileo. Essa non lo è invece rispetto alle trasformazioni di Lorentz e poiché queste esprimono in modo relativisticamente corretto il passaggio da un sistema inerziale ad un altro, dobbiamo concludere che il principio di relatività einsteiniana è incompatibile con le leggi della dinamica newtoniana. Pertanto si presenta la necessità di trovare una formulazione della seconda legge della dinamica che sia covariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz e che si riduca alla legge $F = ma$ per velocità piccole rispetto a quella della luce. Lo stesso Einstein mostrò che il moto di una particella elettricamente carica posta in un campo elettromagnetico può essere descritto dalla legge fondamentale della dinamica newtoniana, purché la massa *m,* che classicamente è costante, sia sostituita dalla seguente espressione dipendente da *v:*

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \; ;$$

m_0, detta *massa a riposo,* è la massa della particella misurata da un osservatore rispetto al quale la particella stessa è in quiete o coincide con la massa della fisica newtoniana.

Quindi la precedente relazione si può interpretare dicendo che *la massa di un corpo, ossia la sua inerzia, non è costante, ma aumenta con la velocità.*

Dalla definizione relativistica di massa segue anche che qualunque particella dotata di massa a riposo non nulla non potrà mai raggiungere la velocità della luce.

Massa ed energia

La definizione relativistica della massa può sembrare un semplice espediente per continuare a scrivere nella forma consueta la legge fondamentale della dinamica senza dover rinunciare al principio di relatività. In realtà, la $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ possiede un significato fisico profondo, che è forse il risultato più importante di tutta la relatività: *l'inerzia di un corpo dipende dal contenuto energetico del corpo stesso.*

Partendo da questa semplice ipotesi, Einstein arrivò a formulare la sua nota *equazione:* $E = mc^2$ *;* in particolare, un corpo in quiete, di massa a riposo m_0, possiede un contenuto di energia, detto *energia intrinseca*, pari a $m_0 c^2$. La materia può essere quindi considerata come una forma di energia molto condensata.

b) *Si risolvano i seguenti quesiti, inerenti agli argomenti di cui sopra:*

1. ***La stella più vicina alla Terra è "Proxima Centauri" (una delle componenti della stella tripla "Alpha Centauri"), la cui distanza è 4,3 anni luce. Se un astronauta compisse il viaggio dalla Terra a "Proxima Centauri" con una velocità uniforme v=0,95 c, quanto tempo impiegherebbe secondo un orologio situato sulla Terra? Quanto impiegherebbe secondo l'orologio dell'astronauta?***

4,526 anni; 1,413 anni

<u>Soluzione</u>

Dalla formula $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ si ricava il tempo $\Delta t' = \frac{\Delta S}{v} = \frac{4{,}3 \cdot c\ anno}{0{,}95\ c}$ = 4,526 anni

Per calcolare l'altro tempo basta utilizzare la formula della dilatazione del tempo

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

e da qui $\Delta \mathrm{t} = \Delta t'\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)$, essendo $\beta = \frac{v}{c} = \frac{0{,}95\ c}{c} = 0{,}95$

quindi

$$\Delta \mathrm{t} = 4{,}526 \text{ anni } \cdot \sqrt{1-(0{,}95)^2} = 1{,}413\ anni$$

Importante è il passaggio dell'unità di misura: 1 anno luce corrisponde allo spazio percorso dalla luce in un anno = c anno.

2. ***Dal superprotosincrotrone [SPS] del CERN di Ginevra emergono protoni la cui velocità è solo di 822 m/sec inferiore a quella della luce. Quanto sembra lunga a questi protoni una traiettoria circolare di raggio r=1200 m nel laboratorio? Qual è la massa di questi protoni? E la loro energia?***

<u>Soluzione</u>

Essendo $v = \frac{(c-822)m}{s}$, allora $\beta = \frac{(c-822)m/s}{c} = 0{,}99$

$$\sqrt{\boldsymbol{1-\beta^2}} = \sqrt{5{,}48 \cdot 10^{-6}} = 2.34 \cdot 10^{-3}$$

Per calcolare la traiettoria si utilizza la formula della contrazione della lunghezza

$$C' = C \cdot \sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{2}}} = 2\pi\, r \cdot \sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{2}}} = 2\pi \cdot 1200\, m \cdot 2.43 \cdot 10^{-3} = 2\pi \cdot 1{,}2 \cdot 10^{3} m \cdot 2{,}43 \cdot 10^{-3} = 17{,}643\, m$$

Osservazione: questa è la lunghezza della traiettoria vista dai protoni, mentre la lunghezza reale è di circa 7 Km.

Per calcolare la massa si applica la formula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{2}}}} = \frac{1}{2{,}43 \cdot 10^{-3}} m_0 = 427 m_0$$

Per calcolare l'energia si utilizza la formula

$$E = mc^2 = 427 \cdot 9{,}38 \cdot \frac{10^8 eV}{c^2} \cdot c^2 = 4005 \cdot 10^8 eV = 400 GeV.$$

3. ***Dall'espressione relativistica dell'energia cinetica $\boldsymbol{E_c}$ si ricavi $\boldsymbol{v^2}$ in funzione di $\boldsymbol{E_c}$,verificando che risulta:***

$$\boldsymbol{v^2 = c^2 \cdot \frac{{E_c}^2 + 2m_0c^2E_c}{(E_c + m_0c^2)^2}}\ .$$

Si studi la funzione $\boldsymbol{v^2 = f(E_c)}$ e si commenti il grafico ottenuto.

Si scriva infine l'equazione della tangente in O a tale grafico e la si confronti con l'espressione classica di $\boldsymbol{v^2}$ in funzione di $\boldsymbol{E_c}$.

$$\textbf{\textit{A.O.}}\quad \boldsymbol{v^2 = (c^2)^-} \quad ; \quad \boldsymbol{v^2 = \frac{2E_c}{m_0}}$$

Velocità della luce nel vuoto $\boldsymbol{v = 3 \cdot 10^8 m/s}$

Energia a riposo del protone $\boldsymbol{m_p c^2 = 938{,}259\ MeV}$

<u>Soluzione</u>

Per verificare l'identità si utilizza la formula $E_c = m \cdot c^2\,(\gamma - 1)$,

essendo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta}^{2}}}$ si ha

$$E_c = m \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$$

$$E_c = m\cdot c^2\left(\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = m\cdot c^2\left(\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = \left(\frac{m\cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2\right) = \left(\frac{m\cdot c^3}{\sqrt{c^2-v^2}} - mc^2\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{c^2-v^2} = \frac{mc^3 - mc^2\cdot\sqrt{c^2-v^2}}{E_c}$$

Da cui, con opportuni calcoli e passaggi si ottiene che l'espressione di v^2 in funzione di E_c è la seguente

$$v^2 = c^2\cdot\frac{{E_c}^2 + 2mc^2E_c}{(E_c+mc^2)^2}$$

Essendo l'energia cinetica E_c una quantità sempre positiva, il dominio della funzione risulta essere

D: $[0;\ +\infty[$. La funzione è continua nel suo dominio.

L'origine è l'unico punto di intersezione con gli assi.

Studiamo il comportamento della funzione nel suo estremo superiore:

$\lim_{E_c\to+\infty} c^2\cdot\frac{E_c^2+2m_0c^2E_c}{(E_c+m_0c^2)^2} = c^2$; basta infatti calcolare il rapporto tra i gradi massimi della variabile indipendente a numeratore e denominatore.

Quindi se ne deduce che la retta di equazione $v^2 = (c^2)^-$ è asintoto orizzontale.

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$(v^2)' = c^2\cdot\frac{(2E_c+2m_0c^2)\cdot(E_c+m_0c^2)^2 - \left({E_c}^2+2m_0c^2E_c\right)\cdot 2\cdot(E_c+m_0c^2)}{(E_c+m_0c^2)^4}$$

Dopo semplici semplificazioni e calcoli otteniamo:

$$(v^2)' = c^2\cdot\frac{2{m_0}^2c^4}{(E_c+m_0c^2)^3} = \frac{2{m_0}^2c^6}{(E_c+m_0c^2)^3}$$

La funzione derivata prima non si annulla mai ed è sempre positiva in quanto la quantità al denominatore è sempre positiva perché somma di quantità positive.

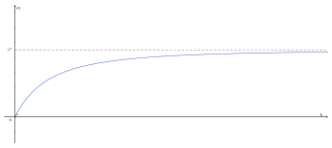
La funzione risulta quindi essere crescente nel suo dominio e presenta evidentemente solo un minimo assoluto nell'origine.

Calcoliamo la derivata seconda della funzione:

$$(v^2)'' = -\frac{2{m_0}^2c^6 \cdot 3 \cdot (E_c + m_0c^2)^2}{(E_c + m_0c^2)^3} = -\frac{6{m_0}^2c^6}{(E_c + m_0c^2)^4}$$

La derivata seconda è sempre negativa quindi la funzione è concava in tutto il dominio.

Tracciamo il grafico della funzione:



La retta tangente al grafico in O coefficiente angolare uguale al valore della derivata prima calcolata in 0:

$$m = f'(0) = \frac{2{m_0}^2c^6}{{m_0}^3c^6} = \frac{2}{m_0}$$

da cui l'equazione della retta diventa:

$$v^2 = \frac{2}{m_0}E_c$$

Tale equazione risulta uguale all'espressione classica di v^2in funzione dell'energia cinetica E_c .

Commento al grafico

Il grafico mostra che v^2 è una funzione approssimativamente lineare dell'energia cinetica E_c per valori abbastanza piccoli di questa, come previsto dalla fisica classica (vedi equazione della tangente in O). Il fatto però che, per la teoria della relatività, v^2 deve avere come limite superiore c^2 causa un fenomeno di saturazione, ovvero vincola v^2 a crescere sempre meno rapidamente al crescere di E_c. Ciò è mostrato dal fatto che la derivata prima $(v^2)'$ è decrescente, anche se positiva, in tutto il dominio della funzione, dato che la derivata seconda $(v^2)''$ è negativa in tutto questo dominio. Al tendere di E_c all'infinito, la derivata prima $(v^2)'$ tende a 0 e di conseguenza v^2tende a un valore costante, che è proprio il suo limite superiore c^2.